

제 2 교시

설맞이 모의고사

수학 영역(가형)

0회 해설

안녕하세요. 설맞이 모의고사 해설입니다.

0회차

수고하셨습니다.

0회차는 작년 수능 스타일과 유사하도록, 퀸러 문항 21, 29, 30번을 제외한 나머지 문항들은 개념에 의거하여 깔끔하게 풀리도록 제작했습니다.

저희가 만든 21, 29, 30번 문항이 이 모의고사의 변별력을 결정하는데 중요한 역할을 할 것입니다.

21번 문항은 극악 난이도는 아니나 창의적이고 배움이 있는 문항으로, 1등급을 분별하는 핵심 문항입니다.

29번은 고난도 공간도형 문항으로 기하적인 의미 해석력 및 계산력이 요구되며,

30번은 평가원적인 개념의 스케일이 넓은 초고난도 끝판왕 문항이었으며,

두 문항은 푸셨다면 최상위권이라고 자부하셔도 좋습니다.

이 어려운 문제들을 모두 푸셨다면 정말 잘하셨고, 못 푸셨더라도 상심할 것 없이 수고하셨다고 말씀드리고 싶습니다.

여러분께서 모의고사를 실전 테스트용으로 공부하는데 그치지 않고,

틀린 문항과 아리송하게 푼 문항들을 해설지를 보고 다시 공부하신다면, 여러분들의 수학적 사고능력에 큰 양분이 될 것입니다.

그러기 위해, 저희 설맞이 모의고사 팀에서는 모든 문항을 꼼꼼하게 풀이했고 해설자의 의견까지 담아냈습니다.

빠른 정답

1	④	2	③	3	①	4	⑤	5	②
6	③	7	⑤	8	④	9	①	10	②
11	④	12	⑤	13	①	14	④	15	③
16	⑤	17	②	18	③	19	①	20	②
21	③	22	2	23	50	24	6	25	5
26	228	27	100	28	594	29	10	30	47

1. [벡터의 성분][2점]

$$\vec{a} = (2, -1), \vec{b} = (-3, 6) \text{으로 } \vec{a} + \vec{b} = (2 + (-3), -1 + 6)$$

$$= (-1, 5)$$

따라서 성분의 합은 $-1 + 5 = 4$

답 ④ 4

2. [조합과 중복조합][2점]

$${}_4H_2 + {}_5C_2 = {}_{4+2-1}C_2 + {}_5C_2 = {}_5C_2 + {}_5C_2 = \frac{5 \cdot 4}{2!} + \frac{5 \cdot 4}{2!} = 10 + 10 = 20$$

답 ③ 20

3. [자연상수의 정의][2점]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{4x \cdot \frac{1}{2}} = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

답 ①

4. [음함수 미분법][3점]

$e^x + x + \ln y = 0$ 의 양변을 x 에 대해 미분하면,

$$e^x + 1 + \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -y(e^x + 1)$$

따라서 점 $(0, \frac{1}{e})$ 에서의 접선의 기울기는

$$-\frac{1}{e}(e^0 + 1) = -\frac{2}{e}$$

답 ⑤ $-\frac{2}{e}$

5. [좌표공간상의 직선의 방정식][3점]

두 점 A(2, 5, -3)와 B(4, 3, -2)을 지나는 직선의 방향벡터는

$$\vec{u} = (4-2, 3-5, -2-(-3)) = (2, -2, 1)$$

점 A(2, 5, -3)을 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (2, -2, 1)$ 인 직선의

$$\text{방정식은 } \frac{x-2}{2} = \frac{y-5}{-2} = z+3$$

따라서 $a = 2, b = 1$ 으로 $a+b = 3$

답 ② 3

6. [독립사건의 확률][3점]

… ①

사건 , 가 독립이므로 사건 , 도 독립

따라서

이므로 ①식의 양변을 정리하면,

$$\frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A)P(B^c)}{P(B^c)} = P(A)$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$$

$$\therefore P(A) = P(B)$$

$$P(A \cap B^c) = P(A^c \cap B) = a, P(A \cap B) = b \text{ 라 두면, } 2a + b = \frac{8}{9}$$

또한, ①식을 a 와 b 에 관한 식으로 정리하면

$$\frac{a}{a + \frac{1}{9}} = \frac{b}{a + b}$$

$$\Rightarrow a^2 + ab = ab + \frac{1}{9}b$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{1}{9}b$$

$$2a + b = 2a + 9a^2 = \frac{8}{9} \text{ } \circ]$$

$$a \text{에 관한 이차방정식을 풀면}(단, } a > 0) \quad a = \frac{2}{9}, \quad b = \frac{4}{9}$$

$$\therefore P(A) = a + b = \frac{2}{3}$$

$$\text{답 } ③ \frac{2}{3}$$

7. [삼각함수][3점]

$$\tan\theta = \frac{5}{12}, \sin\theta = \frac{5}{13}, \cos\theta = \frac{12}{13} \text{ 를 만족시키는 } \theta \text{를 } \alpha \text{라 하면}$$

$$\tan\theta = \frac{5}{12} \text{ 의 해는 } \theta = \alpha + k\pi \text{ (} k \text{는 정수)}$$

i) 단, 는 정수 인 경우,

$\circ]$ 으로

ii) $\theta = \alpha + (2t - 1)\pi$ (단, t 는 정수)인 경우,

$$\sin(\alpha + (2t - 1)\pi)$$

$$= \sin(\alpha + 2\pi t - \pi)$$

$$= \sin(\alpha - \pi)$$

$$= -\sin(\pi - \alpha)$$

$$= -\sin\alpha$$

$$= -\frac{5}{13}$$

$$\left| \sin(\alpha + (2t - 1)\pi) - \frac{1}{4} \right| \\ = \left| -\frac{5}{13} - \frac{1}{4} \right| = \frac{33}{52}$$

따라서 $\left| \sin\theta - \frac{1}{4} \right| \circ]$ 될 수 있는 모든 값의 합은

$$\text{답 } ⑤ \frac{10}{13}$$

8. [공간벡터의 내적][3점]

$\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD} \circ]$ 으로 $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AD} \circ]$ 다. 와 가

이루는 각을 θ 라고 하면, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AG} = |\overrightarrow{AD}| |\overrightarrow{AG}| \cos\theta$

선분 AD는 네 점 C,G,H,D로 이뤄진 평면과 수직이므로 선분

AD와 선분 DG는 수직. 삼각형 ADG는 $\angle ADG$ 가

$\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형. $|\overrightarrow{AD}| = 2, |\overrightarrow{AG}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 3\sqrt{2}$,

$|\overrightarrow{DG}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \circ]$ 으로 $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 따라서

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EH} = 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 4$$

$$\text{답 } ④$$

9. [미개변수 미분법][3점]

예개변수 미분법에 의하여 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ 이므로

$\frac{dy}{dt}, \frac{dx}{dt}$ 의 값을 구하면

$$\frac{dy}{dt} = 6t+2 \text{ 이고 } \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2t-1}} \text{ 이므로 } \frac{dy}{dx} = (6t+2)\sqrt{2t-1}.$$

$t=1$ 일 때, $(6 \cdot 1 + 2)\sqrt{2 \cdot 1 - 1} = 8$

답 ① 8

10. [통계적 추정][3점]

표본평균이 590, 표본평균의 표준편차가 60점이므로 신뢰도 95%의

$$\text{신뢰구간은 } 590 - 1.96 \times \frac{60}{\sqrt{100}} \leq X \leq 590 + 1.96 \times \frac{60}{\sqrt{100}}.$$

$$578.24 \leq X \leq 601.76$$

이) 신뢰구간에 포함되는 자연수는 579부터 601까지이므로

ii) 신뢰구간에 포함되는 자연수의 개수는 23개

답 ② 23

11. [지수함수와 로그함수의 역함수 관계][3점]

함수 $f(x) = a^x$ 를 x 에 대해 미분하면 $f'(x) = a^x \ln a > 0$ 이므로

함수 $f(x)$ 는 일대일함수이다. 즉 함수 $f(x) = a^x$ 는 역함수가

존재하며, 따라서 함수 \quad 는 역함수가 존재한다.

우선 주어진 지수함수의 역함수를 구하자. 함수 \quad 와

의 역함수 \quad 는 직선 \quad 에 대해 대칭이므로

는

이) 함수가 점 \quad 를 지나므로 이를 대입하면,

$$2 = \log_a 25, \therefore a = 5$$

이제 b 의 값을 구하기 위해 점(5, b)를 대입하면

$$b = \log_5 5 - 1, \therefore b = 1$$

$$\therefore a+b = 6$$

답 ④ 6

12. [입체도형의 부피적분][3점]

곡선 $y = f(x)$ 와 x 축, y 축, 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 도형을

밑면으로 한 입체도형이 존재하여 이 입체도형을 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 정삼각형이라고 할 때, 정삼각형의 한 변의 길이는 $f(x)$ 이다. 정삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{3} \cdot \{f(x)\}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \{f(x)\}^2 \text{ 이므로 } ii) \text{ 입체도형의 부피는}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx = \sqrt{3}$$

$$\text{따라서 } \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx = \sqrt{3} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = 4$$

답 ⑤ 4

13. [구분구적법][3점]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \sqrt{n}} \cdot (\sqrt{n+2} + \sqrt{n+4} + \dots + \sqrt{3n-2} + \sqrt{3n})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{\frac{n+2}{n}} + \sqrt{\frac{n+4}{n}} + \dots + \sqrt{\frac{3n-2}{n}} + \sqrt{\frac{3n}{n}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 + \frac{4}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{2n-2}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2n}{n}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \times \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{2k}{n}}$$

$$= \int_1^3 \frac{1}{2} \sqrt{x} dx$$

$$= \frac{3\sqrt{3}-1}{3}$$

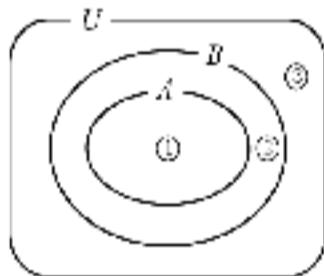
$$= \sqrt{3} - \frac{1}{3}$$

답 ① $\sqrt{3} - \frac{1}{3}$

14. [화률][4점]

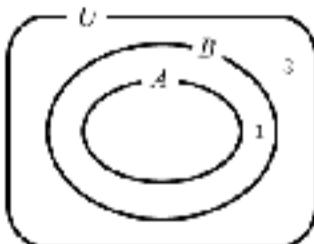
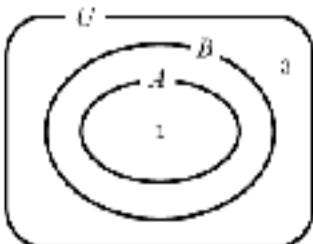
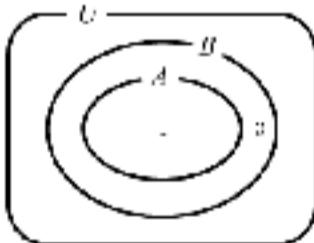
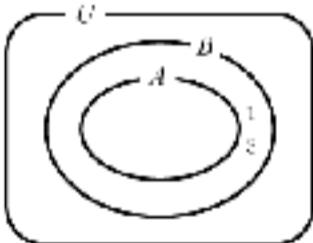
$A \subset B^\complement$ 경우는 아래의 그림에 원소 4개를 배열하는 방법의

수이므로 $3^4 = 81$ (가지)



$A \subset B^\complement$ 면서 조건 (가), (나)를 만족시키는 원소 1, 3의 위치는

다음과 같이 4가지이다.



즉 1, 3의 위치를 정하는 가지수는 4가지이고, 그 후 나머지

원소를 배치하는 가지수는 가지이므로 조건 (가), (나)를

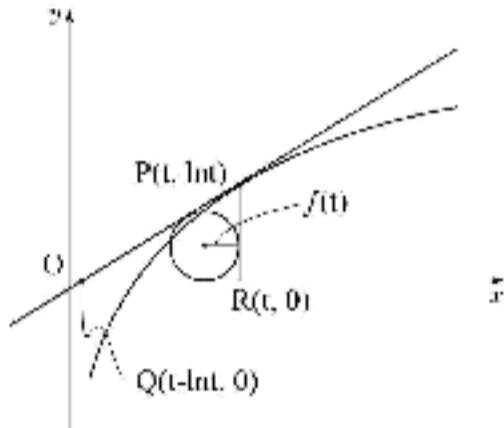
만족시키는 경우의 수는

(가지)

따라서 $A \subset B^\complement$ 때 (가), (나)를 만족시키는 화률은

답 ④ $\frac{4}{9}$

15. [로그함수의 극한][4점]



점 P의 좌표가 $(t, \ln t)$ 이므로 점 R의 좌표는 이며, 함수

$y = f(x)$ 위의 점 $(t, \ln t)$ 에서 그은 접선의 방정식은

$$y = f'(t)(x-t) + f(t), f'(x) = (\ln t)' = \frac{1}{t} \text{ 이므로 점 } \quad \text{에서}$$

$$\text{그은 접선의 방정식은 } y = \frac{1}{t}(x-t) + \ln t$$

따라서 $Q(t - \ln t, 0)$ 이고, $\overline{QR} = t \ln t$, $\overline{PR} = \ln t$ 이다. 삼각형

PQR은 선분 PQ 를 빗변으로 하는 직각삼각형이고, 피타고拉斯

정리에 의해

$$\overline{PQ} = \sqrt{(\overline{PR})^2 + (\overline{QR})^2} = \sqrt{(\ln t)^2 + (t \ln t)^2} = \sqrt{t^2 + 1} \ln t$$

\therefore (삼각형 PQR의 넓이)

$$= \frac{1}{2}(\overline{PQ}) \times \overline{PR}$$

$$= \frac{1}{2}f(t)\left[t \ln t + \ln t + \ln t \sqrt{t^2 + 1}\right] \text{ 이므로}$$

만족시키는 경우의 수는

(가지)

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{f(t)}{t^2 - t} &= \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{t \ln t}{t(t-1)(t+1+\sqrt{t^2+1})} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{\ln t}{t-1(t+1+\sqrt{t^2+1})}.\end{aligned}$$

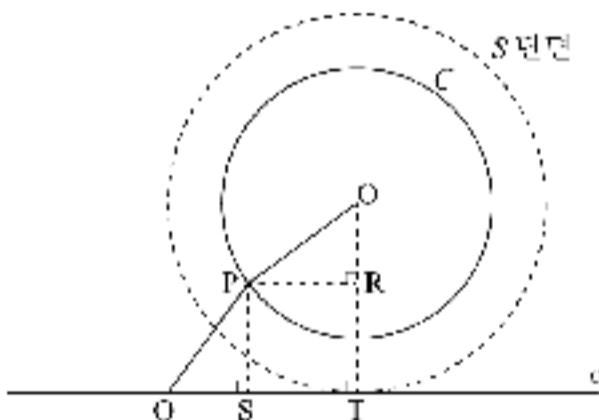
○ 때, $t = x+1$ 로 치환하면

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{\ln t}{t-1(t+1+\sqrt{t^2+1})} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} \cdot \frac{1}{(x+2+\sqrt{(x+1)^2+1})} \\ &= \frac{1}{2+\sqrt{2}} \\ &= \frac{2-\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

답 ③ $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

16. [입체도형의 정사영][4점]

원 C 의 넓이가 25π 로 반지름의 길이는 5이다. 두 점 P , Q 를 지나고 α 에 수직인 평면으로 자른 단면은 다음과 같다.



구 S 의 반지름의 길이가 7이므로 $\angle OTS = 7^\circ$ 이고,

\overline{OP} 의 평면 α 위로의 정사영의 길이가 4이므로 $\overline{ST} = \overline{PR} = 4$

따라서 이고,

이므로 피타고라스 정리에 의해

(선분의 평면 위로의 정사영의 길이)

답 ⑤ 3

17. [확률밀도함수][4점]

$$P(0 \leq X \leq t) = \frac{e^t + e^{-t} - 2}{4} = \int_0^t f(x)dx$$

$$\text{위 식을 } t \text{에 대해 미분하면 } f(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{4}$$

또한 확률변수 P 가 구간 $[0, a]$ 에서 정의되었으므로

$$P(0 \leq X \leq a) = 1, \frac{e^a + e^{-a} - 2}{4} = 1$$

○ 때, $e^a = A$ 라 하면

$$\frac{A + \frac{1}{A} - 2}{4} = 1$$

$$\Rightarrow A + \frac{1}{A} = 6$$

$$\Rightarrow A^2 - 6A + 1 = 0$$

$$\Rightarrow A = 3 + 2\sqrt{2} \quad (a \geq 0 \text{로 } A \geq 1)$$

$$\therefore f(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{4}$$

$$= \frac{A - \frac{1}{A}}{4}$$

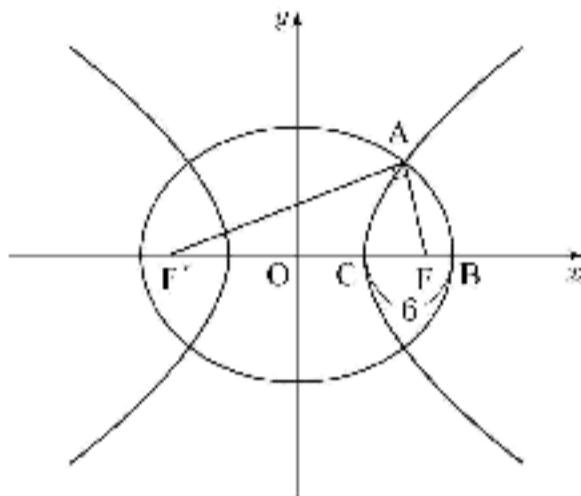
$$= \frac{3 + 2\sqrt{2} - \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}}}{4}$$

$$= \frac{3 + 2\sqrt{2} - (3 - 2\sqrt{2})}{4}$$

$$= \sqrt{2}$$

답 ②

18. [타원과 쌍곡선][4점]



점 A는 타원과 쌍곡선이 제 1, 2, 3, 4 사분면과 만나는 네 개의

점 중 하나에 위치할 수 있다.

편의를 위해 A가 제1사분면 위의 점이라고 두자.

점 B의 x좌표를 a, $\overline{AF} = k$ 라 두면 타원의 장축의 길이는

$2a$ 이고, 타원의 정의에 의하여 $2a = \overline{AF'} + \overline{AF}$ 이므로,

$\overline{AF'} = 2a - k$ 한편, 쌍곡선의 정의에 의하여 주축의 길이는

$\overline{AF'} - \overline{AF} = (2a - k) - k = 2a - 2k$ (제 1사분면 위의 점 A에 대하여

$\overline{AF'} > \overline{AF}$) 이므로 점 C의 x좌표는 $a - k$ 이다. 이때,

$\overline{BC} = 6 = a - (a - k) = k$ 이므로 $k = 6$ 이다. 그리고,

$\overline{BF} : \overline{CF} = 1 : 2$ 이므로 $\overline{BF} = 2$, $\overline{CF} = 4$ 이므로, $\overline{FF'} = 2a - 4$ 이다.

직각삼각형 AFF'에서 피타고라스 정리에 의해,

$(2a - 4)^2 = (2a - 6)^2 + 6^2$ 이고 a에 관한 일차방정식을 풀면

$a = 7$

따라서, (장축의 길이) = $2a = 14$

답 ③ 14

19. [확률][4점]

(가).

주사위를 던져 나오는 눈의 최댓값이 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_2}{7^2} + \frac{a_3}{7^3} + \cdots + \frac{a_n}{7^n} \right) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{7^2} + \frac{6}{7^3} + \cdots + \frac{6}{7^n} \right) \\ &= \frac{6}{7} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{7^k} \\ &= \frac{6}{7} \times \frac{\frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{7}} \\ &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_2}{7^2} + \frac{a_3}{7^3} + \cdots + \frac{a_n}{7^n} \right) \leq \frac{1}{7} \text{ 이므로 } \frac{1}{7} \leq \frac{1}{(가)}, 즉$$

(나).

주사위를 굴리며 발생할 수 있는 모든 경우의 수는 다음과 같이 나뉠 수 있다. 이때, a_1 의 값이 결정되는 사건들의 확률은 모두 $\frac{1}{6}$ 로 같다.

1) $a_1 = 1$ 인 경우

$\frac{1}{6}$ 의 확률로 $a_1 = 1$ 이 되면 부등식이 무조건 성립하지 않는다.

2) $a_1 = 2$ 인 경우

$\frac{1}{6}$ 의 확률로 $a_1 = 2$ 가 성립했다고 하자.

주사위를 던지는 사건은 독립사건이므로

$a_k = n$ 일 확률과 $a_{k+1} = n$ 일 확률이 동일하다(단, n 은 자연수).

따라서 $\frac{a_2}{7} + \cdots + \frac{a_n}{7^{(n-1)}} > \frac{1}{3}$ 이 성립할 확률은

$\frac{a_1}{7} + \cdots + \frac{a_{(n-1)}}{7^{(n-1)}} > \frac{1}{3}$ 이 성립할 확률과 같고 이는 $\frac{1}{6}$ 이다.

때문에 $\frac{1}{6}$ 인 경우는

3) $\frac{1}{6}$ 인 경우

의 확률로

이면 문제에서의 부등식은

항상 성립한다.

따라서 a_1 의 값에 따라 나눌 수 있는 모든 경우의 수를 더하면

$$p_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}p_{n-1}, \text{ 즉 } \gamma = \frac{2}{3}$$

(다).

$$(p_n - \alpha) = \frac{1}{6}(p_{n-1} - \alpha) \text{ 식을 전개하면}$$

$$p_n = \frac{1}{6}p_{n-1} + \frac{5}{6}\alpha \text{ 이므로 } \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\alpha \times \beta + \gamma \leq \frac{4}{5} \times 7 + \frac{2}{3} = \frac{28}{5} + \frac{2}{3} = \frac{94}{15}$$

$$\therefore p+q=109$$

답 ① 109

20. [미분과 적분][4점]

$$g(x) = 2xf(x) - \int_1^x f(t)dt \text{에서, } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$g(1) = 2f(1) - \int_1^1 f(t)dt = 2f(1), \text{ } x=0 \text{을 대입하면}$$

$$g(0) = -\int_1^0 f(t)dt = 0 \text{임을 알 수 있다.}$$

(나) 조건의 식을 이용하여 적분하면,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f'(x)g(x)dx \\ &= [f(x)g(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x)g'(x)dx \\ &= 2\{f(1)\}^2 - \int_0^1 f(x)f'(x)dx + 2xf'(x)dx \\ &= 2\{f(1)\}^2 - \int_0^1 f(x)^2 dx - \int_0^1 2xf'(x)f(x)dx \\ &= 2\{f(1)\}^2 - \int_0^1 f(x)^2 dx - [xf(x)^2]_0^1 + \int_0^1 f(x)^2 dx \\ &= 2\{f(1)\}^2 - \{f(1)\}^2 \\ &= -\{f(1)\}^2 \end{aligned}$$

(나) 조건에 의하여 $\{f(1)\}^2 = 1$

답 ② 1

21. [위치벡터와 미분법][4점]

점 R이 시각 $t=1, t=2$ 에서 각각 $(1, \sqrt{3})$, $(2, 5)$ 에 위치하므로

$$f(1) = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2, f(2) = \sqrt{2^2 + 5^2} = 10$$

또한, $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ 이므로 원점을 O라 할 때, $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OR}$ 이므로 세 점 P, Q, R의 위치벡터는 삼각형을 이룬다.

따라서 삼각부등식에 의하여 $|t^2 - t - 2| \leq f(t) \leq |t^2 + t + 4|$ 가 성립하고 그레프를 그려보면 $y = f(t)$ 의 그레프는

$y = |t^2 + t + 4|$ 의 그레프와 $y = |t^2 - t - 2|$ 의 그레프 사이에만 존재해야 함을 알 수 있다.

i) 때, $f(1) = 2, f(2) = 10$ 이므로 $t=1, t=2$ 일 때, 다른 두 그레프와 교점을 갖는다. $y = f(t)$ 의 그레프가 다른 두 그레프 사이에 존재하므로 두 교점에서는 그레프가 서로 접한다. 따라서

$$f'(1) = -1, f'(2) = 5 \text{이다.}$$

점 R의 시각 t 에서의 위치를 $(x(t), y(t))$ 라 하자.

그렇다면 (점 R의 속도벡터) = $\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t))$ 가 되고,

$$(\text{점 R의 속력}) = |v(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \text{이다.}$$

$$f(t) = \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2}$$

$$\Rightarrow (f(t))^2 = (x(t))^2 + (y(t))^2$$

$$\Rightarrow 2f(t)f'(t) = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t)$$

i) 식에 $x=1, y=\sqrt{3}$ 를 대입하자.

i)

… ⑦

ii) $t = 2$

$$f(2)f'(2) = x(2)x'(2) + y(2)y'(2)$$

$$\Rightarrow 25 = 4x'(2) + 3y'(2) \quad \text{… ④}$$

이후로 답을 찾는 과정에는 세 가지가 있다.

1) 원을 이용하는 방법

지금 우리는 점 R의 속력의 최솟값 m을 구해야 한다.

그런데 $(속력) \geq 0^\circ$ 므로 $(속력)^2$ 의 최솟값을 구해도 된다.

i) $t = 1$ 일 때, $\{x'(1)\}^2 + \{y'(1)\}^2 = k_1^2$ 라 하자. (단, $k_1 > 0$)

$x'(1)$ 과 $y'(1)$ 을 각각 좌표축이라고 생각하면, 이 둘을 축으로 하는 좌표 평면을 그릴 수 있다. 또한, $\{x'(1)\}^2 + \{y'(1)\}^2 = k_1^2$ 는 중심이 원점이고, 반지름의 길이가 k_1 인 원의 방정식이라 할 수 있다.

그리고 ④ 식에 대하여 좌표평면 위에 다음과 같이 나타낼 수 있다. 이 때 k_1 의 최솟값을 m_1 이라 하면 그 값은 직선 ④과 원이 접할 때, 그 원의 반지름의 길이가 된다. 그 값은 직선 ④과 원점 사이의 거리와 같으므로,

$$m_1 = \frac{|2|}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = 1$$

ii) $t = 2$ 일 때, $\{x'(2)\}^2 + \{y'(2)\}^2 = k_2^2$ 라 하자. (단, $k_2 > 0$)

이 경우도 $t = 1$ 인 경우와 같은 방법을 사용한다. 그러면 ④ 식에 대하여 좌표평면 위에 다음과 같이 나타낼 수 있다. 이 때 k_2 의 최솟값을 m_2 라 하면 그 값은 직선 ④과 원이 접할 때, 그 원의 반지름의 길이가 된다. 그 값은 직선 ④과 원점 사이의 거리와 같으므로,

$$m_2 = \frac{|-25|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 5$$

i)과 ii)에 의하여

2) 이차식의 최대·최소를 통해 구하는 방법

$$-2 = x'(1) + \sqrt{3}y'(1) \quad \dots \text{⑤}$$

i) 식을 $x'(1)$ 에 대해 정리하여 위 식에 대입하여 정리한다.

$$\{-\sqrt{3}y'(1) - 2\}^2 + \{y'(1)\}^2 = k_1^2$$

$$4\left(y'(1) + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1 = k_1^2$$

즉, k_1^2 의 최솟값은 1이며, k_1 의 최솟값은 1° 이다.

$$\text{따라서 } m_1 = 1$$

ii) $t = 2$ 일 때, $\{x'(2)\}^2 + \{y'(2)\}^2 = k_2^2$ 라 하자.

$$25 = 4x'(2) + 3y'(2) \quad \dots \text{⑥}$$

i) 식을 $x'(2)$ 에 대해 정리하여 위 식에 대입하여 정리한다.

$$\left\{-\frac{3}{4}y'(2) + \frac{25}{4}\right\}^2 + \{y'(2)\}^2 = k_2^2$$

$$25\{y'(2) - 3\}^2 + 25 = k_2^2$$

즉, k_2^2 의 최솟값은 25이며, k_2 의 최솟값은 5° 이다.

$$\text{따라서 } m_2 = 5$$

i), ii)에 의해

$$m_1 \times m_2 = 1 \times 5 = 5$$

3) 코시-슈바르츠 부등식에 의해

$$(1^2 + (\sqrt{3})^2)((x'(1))^2 + (y'(1))^2) \geq (x'(1) + \sqrt{3}y'(1))^2 = (-2)^2 = 4$$

$$\Rightarrow (x'(1))^2 + (y'(1))^2 \geq 1$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{v(1)}| \geq 1 \quad \therefore m_1 = 1$$

ii) $t = 2$

코시-슈바르츠 부등식에 의해

i) 일 때,

이라 하자.

$$\Rightarrow (x'(2))^2 + (y'(2))^2 \geq 25$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{v(1)}| \geq 5 \quad \therefore m_2 = 5$$

$$\therefore m_1 m_2 = 5$$

답 ③ $5\sqrt{10}$

22. [자연수의 분할][3점]

$$4 = 3+1 = 2+2 \text{ } \circ] \text{으로 } P(4, 2) = 2$$

[다른 풀이] $P(4, 2) = P(2, 1) + P(2, 2) = 1 + 1 = 2$

답 2

23. [삼각함수의 극한][3점]

$$f'(x) = (\tan x)' = \sec^2 x \circ] \text{으로 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{2x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{2x^2 \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{2x^2 \cos^2 x} = \frac{1}{2}.$$

따라서 $a = \frac{1}{2} \circ]$ 고 $100a = 50$

[다른 풀이]

$$f'(x) = (\tan x)' = \sec^2 x \circ] \text{으로 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{2x^2}$$

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x \circ] \text{으로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{2x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

따라서 $\circ]$ 고

답

24. [경우의 수][3점]

n 명의 학생 중 은수와 혜정이를 한 사람처럼 묶어서 두 그룹

혹은 B 에 배정하는 경우의 수는 2가지이다.

남은 $n-2$ 명의 학생들이 두 그룹 A 혹은 B 에 배정되는 경우의 수는 2^{n-2} 가지이며, 모든 학생이 A 그룹에 배정되는 경우의 수(1가지)와 모든 학생이 B 그룹에 배정되는 경우의 수(1가지)를 제외하면 된다.

$\circ]$ 를 식으로 나타내면 $2 \times 2^{n-2} - 2 = 2^{n-1} - 2 \circ]$ 고,

$2^{n-1} - 2 = 30$ 을 만족하는 n 의 값은 6

답 6

25. [삼각함수의 덧셈정리][3점]

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(\cos \beta - \sin \alpha)^2 + (\sin \beta - \cos \alpha)^2} \\ &= \sqrt{\cos^2 \beta - 2 \cos \beta \sin \alpha + \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \beta \cos \alpha + \cos^2 \alpha} \\ &= \sqrt{2 - 2(\cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha)} \\ &= \sqrt{2 - 2 \sin(\alpha + \beta)} \end{aligned}$$

$$\circ] \text{ 때 } \cos(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{5}}{3} \circ] \text{ 고 } 0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2} \circ] \text{ 으로}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{2}{3} (\sin(\alpha + \beta) > 0)$$

따라서 $d = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $d^2 = \frac{2}{3}$

답

26. [정규분포][4점]

축구화 한 켤레의 무게를 확률변수 Y 라 두면, 확률변수 Y 는 정규분포 $N(500, 4^2)$ 을 따른다. 이 때, 임의로 택한 4켤레의 축구화 무게의 합을 확률변수 W 라고 하고, 무게의 평균을 \bar{Y} 라 하자.

$$E(\bar{Y}) = E(Y) = 500$$

$$V(\bar{Y}) = \frac{V(Y)}{4} = \frac{16}{4} = 4 = 2^2 \text{이므로,}$$

확률변수 \bar{Y} 는 정규분포 $N(500, 2^2)$ 을 따른다.

$Z = \frac{\bar{Y} - 500}{2}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\bar{Y} = \frac{W}{4} \text{이므로}$$

$$P(W \geq 2016) = P(4\bar{Y} \geq 2016) = P(\bar{Y} \geq 504)$$

$$= P\left(\frac{\bar{Y} - 500}{2} \geq \frac{504 - 500}{2}\right)$$

$$= P(Z \geq 2) = 0.5 - P(0 < Z < 2)$$

$$= 0.5 - 0.4772 = 0.0228$$

총 10000개의 품을 만들 때, 확률변수 X 가 이항분포

$B(10000, 0.0228)$ 을 따른다. 10000은 충분히 큰 수이므로,

확률변수 X 는 정규분포

$$N(10000 \times 0.0228, 10000 \times (0.0228) \times (0.9772))$$
 를 따른다.

따라서 폐기되는 품의 수의 평균은

$$E(X) = 10000 \times 0.0228 = 228$$

답 228

27. [포물선][4점]

포물선 위의 점 A 에 대하여 점 B 를 지나고 포물선

에 접하는 접선을 L 라 하면

직선 AB 가 점 C 을 지나므로, 즉

$$b = -\frac{3}{4}(a-3) \text{이} \rightarrow \text{포물선 식에 대입하면}$$

정리하면 $3a^2 - 82a + 27 = 0$ 이다. 따라서 두 점 A, B 의

$$x \text{ 좌표의 합은 } \frac{82}{3}$$

한편 포물선 위의 한 점에서 초점까지의 거리는 한 점에서 준선까지의 거리와 같으므로

$$AF + BF$$

$$= (\text{점 } A, B \text{의 } x \text{ 좌표의 합}) + 2 \cdot (\text{원점과 준선 사이의 거리})$$

$$= \frac{82}{3} + 2 \cdot 3 = \frac{100}{3}$$

$$= k$$

$$\therefore 3k = 100$$

답 100

28. [경우의 수][4점]

주어진 문제의 조건을 만족시키도록 엘리베이터에서 내릴 수 있는 사람의 수를 나누면

i) 3명과 1명

ii) 2명과 2명

iii) 1명과 1명과 2명

iv) 1명과 1명과 1명과 1명

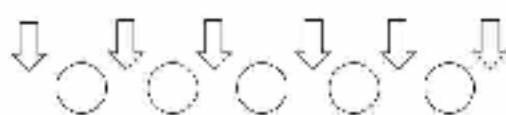
으로 나눌 수 있다.

사람이 내리는 2개의 층과 사람이 내리지 않는 5개의 층이 있다.

사람이 내리지 않는 5개의 층의 사이사이와 양 끝의 6개의

틈 사이에 3명과 1명이 내리는 2개의 층을 각각 배치하는 경우의

수와 같다.



내리는 인원을 두 그룹으로 나누는 경우의 수는 네 명 중에서 한 명을 하나의 그룹으로 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_1 = 4$ (가지)이고, 6개의 품 사이에 3명의 그룹과 1명의 그룹을 배치하는 경우의 수는 ${}_8P_2 = 30$ (가지)

따라서 $4 \times 30 = 120$ (가지)

ii)

사람이 내리는 2개의 충과 사람이 내리지 않는 5개의 충이 있다.

사람이 내리지 않는 5개의 충의 사이사이와 양 끝의 6개의 품 사이에 2명과 2명이 내리는 2개의 충을 각각 배치하는 경우의 수와 같다.



내리는 인원을 두 그룹으로 나누는 경우의 수는 네 명 중에서 두 명을 하나의 그룹으로 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2} = 3$ (가지)

6개의 품 사이에 2명과 2명의 그룹을 배치하는 경우의 수는

${}_8P_2 = 30$ (가지)

따라서 $3 \times 30 = 90$ (가지)

iii)

사람이 내리는 3개의 충과 사람이 내리지 않는 4개의 충이 있다.

사람이 내리지 않는 4개의 충의 사이사이와 양 끝의 5개의 품 사이에 1명과 1명과 2명이 내리는 3개의 충을 각각 배치하는 경우의 수와 같다.



내리는 인원을 세 그룹으로 나누는 경우의 수는 명의 인원 중 두 명에 속하는 그룹 하나를 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_2 = 6$ (가지)

5개의 품 사이에 나눠진 세 개의 그룹을 배치하는 경우의 수는

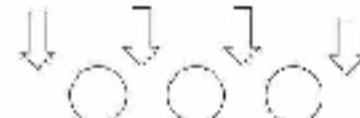
${}_5P_3 = 60$ (가지)

따라서 $6 \times 60 = 360$ (가지)

iv)

사람이 내리는 4개의 충과 사람이 내리지 않는 3개의 충이 있다.

사람이 내리지 않는 3개의 충의 사이사이와 양 끝의 4개의 품 사이에 1명과 1명과 1명과 1명이 내리는 4개의 충을 각각 배치하는 경우의 수와 같다.



한 충에 한 명씩 내리므로 내리는 인원을 네 그룹으로 나누지 않아도 된다. 4개의 품 사이에 네 명을 배치하는 경우의 수는

${}_4P_4 = 24$ (가지)

위 i), ii), iii), iv)의 경우를 모두 더하면

$120 + 90 + 360 + 24 = 594$ (가지)

답

29. [공간도형과 공간비터][4점]

이고 길이는

이다.

삼각형 AMN의 법선벡터를

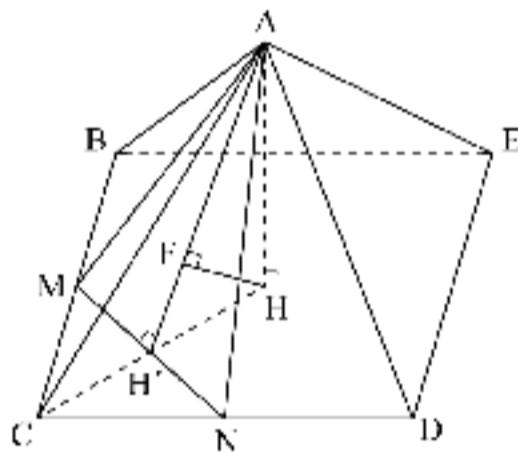
$a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 인, 크기가 1인 벡터 (a, b, c) 라고 하자. xy 평면의 법선벡터 $(0, 0, 1)$, yz 평면의 법선벡터를 $(1, 0, 0)$, zx 평면의 법선벡터를 $(0, 1, 0)$ 이라고 하면 삼각형 AMN와 yz 평면이 이루는 각 θ 에 대해 $(a, b, c) \cdot (1, 0, 0) = \sqrt{1} \times \sqrt{1} \times \cos \theta = a$, 즉 $\cos \theta = a$ 이다. 따라서,

$\cos(xy\text{ 평면과 삼각형 AMN의 이루는 각}) = c$,

$\cos(yz\text{ 평면과 삼각형 AMN의 이루는 각}) = a$,

$\cos(zx\text{ 평면과 삼각형 AMN의 이루는 각}) = b$ 임을 알 수 있다.

즉 (삼각형 AMN의 넓이) $\cdot (a+b+c)$ 의 최댓값이 구하고자 하는 값이 된다. (단, a, b, c 는 양수)



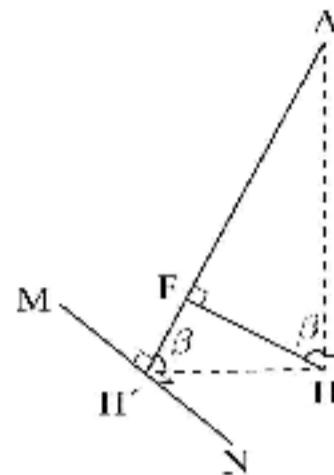
점 A에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발을 H라고 하고 점

A에서 \overrightarrow{MN} 에 수직인 직선을 그었을 때 그 교점을 H'이라고 하면 $\overrightarrow{HH'}$ 의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다. $\overrightarrow{AH'}$ 의 길이는

$\sqrt{(\sqrt{2})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ 이고 \overrightarrow{MN} 의 길이는 $\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 AMN의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 이다.

$|\overrightarrow{CA}| = 2$, $|\overrightarrow{AH}| = \sqrt{2}$ 이므로 \overrightarrow{CA} 와 \overrightarrow{HA} 가 이루는 각을

이라고 하면 $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이고



점 H에서 $\overrightarrow{H'A}$ 에 수선을 그으면, 삼수선의 정리에 의해 가 삼각형 AMN의 법선벡터이다.

또한 \overrightarrow{HA} 와 \overrightarrow{HF} 가 이루는 각 β 에 대해

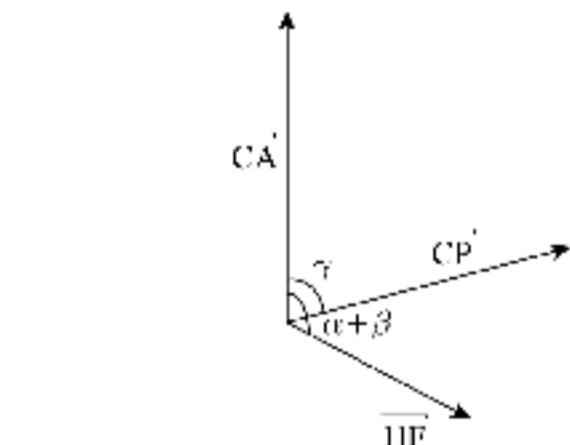
$$\cos \beta = \cos(\angle A H' H) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

두 점 A와 F를 평면 BCDE에 정사영 시키면 모두 위에 떨어지므로 \overrightarrow{CA} 와 \overrightarrow{HF} 가 이루는 각은 $\alpha + \beta$ 이다. 즉

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

한편 삼각형 AMN의 넓이를 구하면서, 구하고자 하는 답이

$$\frac{\sqrt{5}}{2}(a+b+c)$$



이므로 이 값이 최대가

되기 위해서는 벡터 와 벡터 이 이루는 각이 최소가 되어야 한다. 점 를 공간좌표 상의 원점으로 두었을 때 와 벡터 가 같은 평면에 위치할 때 와 벡터 이 이루는 각이 최소가 된다. 와 가 이루는 각을 라고 하면

$$\cos \gamma = \frac{-1+1+\sqrt{2}}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(\sqrt{2})^2} \times \sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ 이고}$$

따라서 \overrightarrow{CP} 와 \overrightarrow{HF} 가 이루는 각의 최소는 $\alpha + \beta - \gamma$ 이고

$$\cos(\alpha + \beta - \gamma) = -\frac{1}{\sqrt{6}} \times \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \times \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{5}-1}{\sqrt{60}} \text{ 이다.}$$

따라서 $\frac{\sqrt{5}}{2}(a, b, c) \cdot (1, 1, 1)$ 의 최댓값은

$$\frac{\sqrt{5}}{2} \times 1 \times \sqrt{3} \times \cos(\alpha + \beta - \gamma) = \frac{\sqrt{5}}{2} \times 1 \times \sqrt{3} \times \frac{3\sqrt{5}-1}{\sqrt{60}} = \frac{3\sqrt{5}-1}{4}$$

즉 $p = \frac{3}{4}$, $q = -\frac{1}{4}$ 이므로 $16(p^2 + q^2) = 10$

답 10

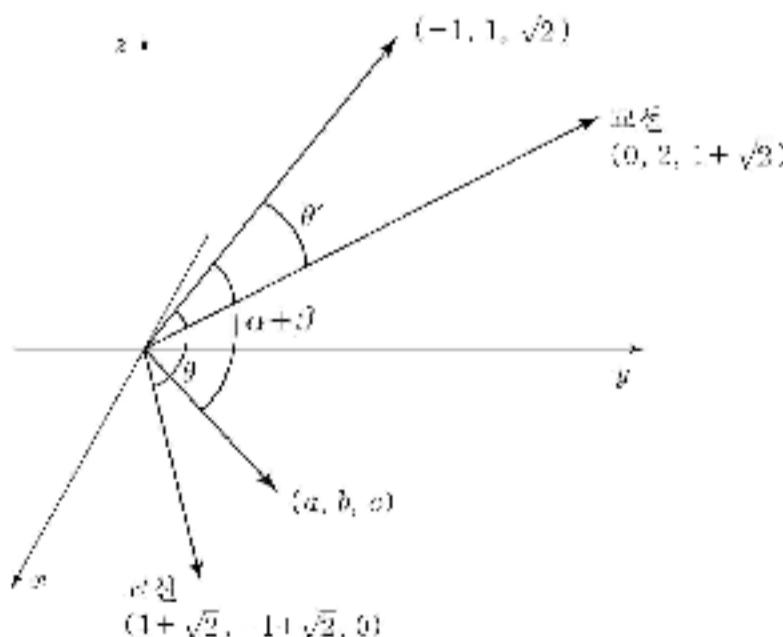
참고 -- <구하는 최댓값에서 a, b, c 가 모두 양수임을 알아보기.>

$(0, 0, 0), (1, 1, 1), (-1, 1, \sqrt{2})$ 를 포함하는 평면을 α 라 하였을 때

평면 α 와 xy 평면의 교선의 방정식은 $\frac{x}{\sqrt{2}+1} = \frac{y}{\sqrt{2}-1}, z=0$

평면 α 와 yz 평면의 교선의 방정식은 $\frac{y}{2} = \frac{z}{1+\sqrt{2}}, x=0$,

삼각형 AMN의 법선벡터 (a, b, c) 도 구하는 답에서 평면 α 에 속해 있어야 한다.



벡터 $(-1, 1, \sqrt{2})$ 와 xy 평면과의 교선 $(\sqrt{2}+1, \sqrt{2}-1, 0)$ 이

이루는 각은 $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ 이고

벡터 $(-1, 1, \sqrt{2})$ 와 yz 평면과의 교선 $(0, 2, 1+\sqrt{2})$ 이

이루는 각은 $\cos \theta' (\text{단, } \cos \theta' > 0)$ 이다.

$(-1, 1, \sqrt{2})$ 와 삼각형 AMN의 법선벡터 (a, b, c) 의 사잇각은 위에

해설에 의해 $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ 이므로

a, b, c 는 답을 구하는 벡터일 때 α 평면에 속해있고 두 교선 사이에 위치하고 있으며, 모두 양수이다.

30. [미분법][4점]

조건 (가)에서 $x_1 \leq x_2$ 이면 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 이고 ① 조건 (나)에서

함수 $f'(x)$ 가 $x = -1$ 에서 극소이므로 극소의 정의에 의해 어떤

열린 구간 $(-1-h, -1+h)$ 에 속하는 모든 실수 x 에 대하여

$f'(x) \geq f'(-1)$ 이다 ②. 그런데 ①에 의해 $-1-h < x < -1$ 이면

$f'(x) \leq f'(-1)$ 이므로 ③. ②와 ③에 의해 어떤 양의 실수 p 가

존재하여 $-1-h < x < -1$ 에서 $f'(x) = f'(-1)$ 인 상수함수가

되어야 한다 ④.

한편 $g(x)$ 를 관찰해보면 $y = f'(x)$ 를 평행이동한 함수임을 알 수

있는데 $x \geq p$ 일 때는 함수 $y = f'(x)$ 의 그래프를 y 축방향으로

$f'(p)$ 만큼, $x < p$ 일 때는 함수 $y = f'(x)$ 의 그래프를 y 축방향으로

$q-p(\geq 0)$ 만큼, y 축방향으로 $f'(q)$ 만큼 평행이동한 것으로

해석할 수 있다. 또한 양쪽 구간의 극한값이 모두

이므로 $f'(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

즉, $f'(x)$ 는 x 의 그래프를 $x=p$ 구간을 제외하고

좌우로 이어붙인 그래프를 나타내는 함수를

의미한다 ⑤.

변곡점의 정의는 아래로 불록한 구간과 위로 불록한 구간이 좌우에서 전환되는 것인데 $g(x)$ 의 변곡점이 존재하지 않는다는

것은 $f'(x)$ 가 전 구간에서 불록성의 변화를 일으키지 않는다는 것과 같다(p 와 q 는 임의의 실수이므로)⑥.

예컨대 $f'(x)$ 가 아래로 불록이다가 불록성이 정의되지 않는 직선구간을 거쳐 위로 불록으로 전환되는 경우 변곡점은 존재하지 않는데 p 를 직선구간의 시작점, q 를 곡선구간의 시작점으로 둔다면 $g(x)$ 는 $x=q$ 에서 변곡점을 가지게 되는 것이므로 문제 조건에 어긋나게 되는 것이다.

한편 $x > 1$ 에서 $f'(x) = ac^x + bc^{-x}$ 이므로 $f''(x) = ac^x - bc^{-x}$ 이고 $\frac{d^2}{dx^2}f'(x) = ac^x - bc^{-x}$ 에서 $\lim_{x \rightarrow \infty}(ac^x - bc^{-x}) = \infty$ 이므로 충분히 큰 x 에 대하여 $f'(x)$ 의 이계도함수는 양의 값을 갖는다. 따라서 ⑥에 의해 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프는 전 구간에서 아래로 불록이거나 직선으로 구성된다⑦.

다시 ④의 뒤로 돌아와서 $f'(x)$ 가 $x=-1$ 의 왼쪽에서 어떠한 움직임을 갖는지 살펴보자. 만약 일정 구간 상수함수를 취하다가 값이 감소한다면(오른쪽으로는 증가 : (가)조건) 값이 감소하기 시작하는 지점, 즉 $f'(x)=f'(-1)$ 을 만족하는 x 의 최솟값을 a 라 할 때, $f''(a)=0$ 이면서 아래로 불록일 수는 없음을 직관적으로 알아차리게 된다. 이를 검증해보자.

$x=a$ 의 오른쪽에서 $f'(x)$ 는 상수함수이고 (다)조건에서 $x=a$ 에서 미분가능하므로 $f''(a)=0$

$f''(a) < f'(-1)$ 인 a 가 존재한다고 가정하면 평균값정리에 의하여 $\frac{f'(a)-f'(-1)}{a-(-1)}=f''(c)>0$ 를 만족하는 c 가 열린 구간 (a, a) 에 존재하여야 한다. 그런데 이므로 함수는 구간 안에 감소하는 구간을 포함할 수밖에 없다. 가

감소한다는 것은 가 위로 불록하다는 것이므로 ⑦에 위배된다. 따라서 인는 존재할 수 없고 (가)조건과 더불어 함수는 에서 상수함수이다⑧.

문제에서 $-1 < x < 1$ 일 때 $f(x)=f(-x)$ 임을 알 수 있으며 $f(x)$ 가 연속이므로

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = \frac{1}{2} \text{ ⑨. 그리고}$$

$x \leq -1$ 에서 $f'(x)$ 가 상수함수이므로 $f(x)$ 는 일차함수의 일부가 되어 $f(-2) = \frac{3}{2}$, $f(-1) = \frac{1}{2}$ 에서 $f(x) = -x - \frac{1}{2}$ (⑩.

(혹은 평균값의 정리를 사용하여

$$f'(c) = \frac{f(-1) - f(-2)}{(-1) - (-2)} = -1 \text{ 임을 보일 수 있다.)}$$

$-1 < x < 1$ 에서 $f(x)=f(-x)$ 이므로 미분하면

$f'(x) = -f'(-x)$ 즉 $y=f'(x)$ 는 $-1 < x < 1$ 에서 원점에 대해 대칭인 그래프를 가진다. $f'(x)$ 도 연속이므로

$f'(1) = -f'(-1) = 1$ 을 알 수 있고 문제의 조건에서

$$f(1) = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } f(x) = ax^x + bx^{-x} \text{에 대해 다음과 같은}$$

연립방정식을 세울 수 있다.

$$\begin{cases} f(1) = ac + \frac{b}{c} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = ac - \frac{b}{c} = 1 \end{cases}$$

$$\text{이를 풀면 } a = \frac{3}{4c}, b = -\frac{c}{4} \text{ ⑪.}$$

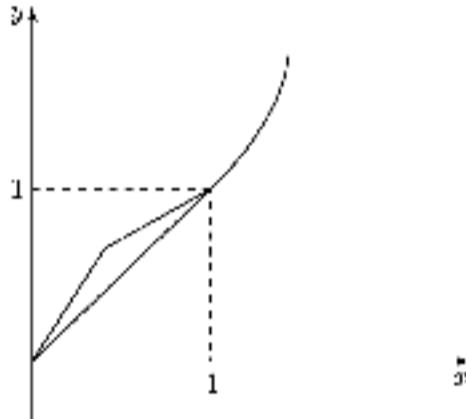
이제 구간 $(-1, 1)$ 에서 함수 $f'(x)$ 가 어떻게 결정되어야 하는지를 살펴보자. 만약 구간 $(0, 1)$ 에 $f'(x)$ 가 아래로 불록인 구간이 존재한다면 구간 $(-1, 1)$ 에서 원점대칭이므로 구간 $(-1, 0)$ 에 $f'(x)$ 가 위로 불록인 구간도 존재할 수밖에 없다.

따라서 구간 $(-1, 1)$ 에서 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프는 위로 불록하지도, 아래로 불록하지도 않은 직선으로만 구성되어야 한다⑫.

이고 조건 (다)에 의해

함수의 그래프는 위의 그림과 같이 직선의

일부이다가 $f'(0) = 0$ 이 되기 위해 어느 지점에서 꺾여 원점을 향하는 직선이 되어야한다⑩.



이때 위의 그림에서와 같이 $x=1$ 에서 바로 꺾여 구간 $(0, 1)$ 에서 $f'(x) - x$ 가 되는 경우가 직선 $x=t$, $x=1$, x 축과 $y=f'(x)$ 의

그래프로 둘러싸인 영역의 넓이 $\int_t^1 f'(x) dx$ 가 최소이므로

$0 < t < 1$ 인 모든 실수 t 에 대하여 $f(t) - \frac{1}{2} - \int_t^1 f'(x) dx$ 의 값이

최대가 된다. 그러므로 $\int_0^1 f(t) dt$ 의 값이 최대가 된다⑪.

또한 $f(x)$ 는 $-1 < x < 1$ 에서 y 축에 대칭이므로,

$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx$ 로 계산할 수 있다.

⑩과 ⑪에서 $x \leq -1$, $x \geq 1$ 인 구간은 함수 $f(x)$ 가

확정되었으므로 구하고자 하는 적분값의 최대는 $\int_{-1}^1 f(x) dx$ 가

최대일 때만 고려하면 된다. 이를 종합하여 구하고자 하는

적분값이 최대가 되도록 하는 $f'(x)$ 에 대한 $y=f'(x)$ 의 그래프를

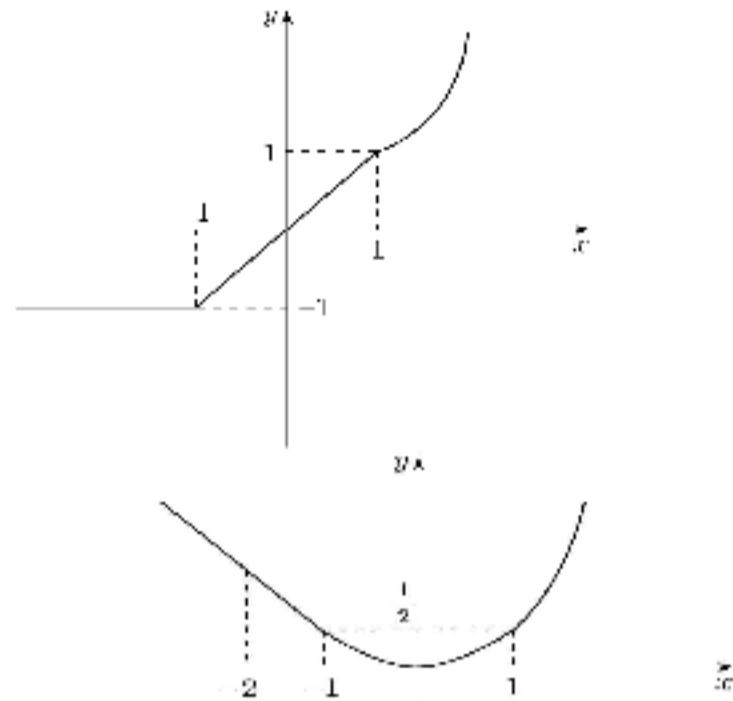
다음과 같이 완성할 수 있다.

각 구간에서 $f'(x)$ 의 부정적분 $f(x)$ 를 구하여 연속이 되도록

적분상수를 정하면

$$f(x) = \begin{cases} -x - \frac{1}{2} & (x < -1) \\ \frac{x^2}{2} & (-1 \leq x < 1) \\ \frac{3}{4c}e^x - \frac{c}{4}e^{-x} & (x \geq 1) \end{cases}$$

를 얻는다.



$$\begin{aligned} k &= \int_{-2}^{\ln 2c} f(x) dx \\ &= \int_{-2}^{-1} \left(-x - \frac{1}{2}\right) dx + \int_{-1}^1 \frac{x^2}{2} dx + \int_1^{\ln 2c} \left(\frac{3}{4c}e^x - \frac{c}{4}e^{-x}\right) dx \\ &= \frac{47}{24} \end{aligned}$$

이므로 $24k = 47$

답 47